Естественные науки

УДК 514. 76

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК СЛОЕВ КАСАТЕЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.К. Барышева, Е.Т. Ивлев

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-56-37-29

Рассматриваются случаи, когда на многомерной поверхности общего вида в евклидовом пространстве инвариантным образом определяются гармонические $f_г$ и аналитические f_a отображения двумерных плоскостей L_2^1 и P_2^1. Эти плоскости принадлежат соответствующим слоям касательного и нормального расслоений данной поверхности.

1. Поля инвариантных линейных подпространств $\tilde{L}_p \subset L_m (2 \le p < m)$ и $\tilde{P}_q \subset P_{n-m} (m+2 \le q < n)$

Статья является продолжением статьи [1] и посвящена рассмотрению случаев, когда отображения $f_г, f_a : L_2^1 \to P_2^1$ в смысле [1, (2.3), (2.6)] инвариантным образом определяются на m-поверхности $S_m \subset E_n$ общего вида, т.е. когда величины $h_{a_1}^{a_2}$ и $q_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2}$ с учетом [1, (2.12), (2.10)], удовлетворяющие четырем соответствующим соотношениям в [1, (2.16)], определяются через величины $A_{\alpha\beta}^{\hat{a}}$ или, что то же, когда геометрические объекты [1, (2.3)] охватываются фундаментальным геометрическим объектом [1,(1.5)] m-поверхности $S_m \subset E_n$.

1.1. Каждой точке A базы $S_m \subset E_n$ в слое P_{n-m} расслоения $N_{m,n-m}$ поставим в соответствие алгебраическую поверхность второго порядка $\tilde{Q}_{n-m-1}^2$, определяемую уравнениями (см. [2, (8), с. 51]):

$$\tilde{Q}_{n-m-1}^2 : A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} + 2 A_{\hat{\alpha}\alpha}^{\alpha} x^{\hat{\alpha}} + m = 0, \ x^{\beta} = 0, \tag{1.1}$$

где в соответствии с [2, (10), с. 51] величины $A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, симметричные по нижним индексам, с учетом [1, (1.5)] определяются по формулам

$$A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = A_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha} A_{\hat{\beta}\alpha}^{\beta} \tag{1.2}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - A_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\gamma}} - A_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} = A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\gamma} \omega^{\gamma}, \tag{1.3}$$

здесь явный вид величин $A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\gamma}$ для нас несущественный. Из (1.1) получаются уравнения асимптотического конуса K_{n-m-1}^2 второго порядка с вершиной A алгебраической поверхности $\tilde{Q}_{n-m-1}^2 \subset P_{n-m}$

$$K_{n-m}^2 : A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 0, \ x^{\alpha} = 0. \tag{1.4}$$

1.2. Точке A базы $S_m \subset E_n$ в слое L_m расслоения $T_{m,m}$ сопоставим конус Q_{m-1}^2 второго порядка с вершиной A, который в соответствии с [3, (21), с. 72] определяется уравнениями:

$$Q_{m-1}^2 : A_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \ x^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь величины $A_{\alpha\beta}$ в соответствии с [3, (21), с. 72] определяются по формулам

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_{(\alpha|\gamma|}^{\hat{\alpha}} A_{|\hat{\alpha}|\beta)}^{\gamma} \tag{1.6}$$

и в силу (1.5) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_{\alpha\beta} - A_{\gamma\beta} \omega_{\alpha}^{\gamma} - A_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta\gamma} \omega^{\gamma}, \tag{1.7}$$

причем явный вид величин $A_{\alpha\beta\gamma}$ для нас несущественный.

Замечание 1.1. В каждой точке $A \in S_m$ слой L_m расслоения $T_{m,m}$ играет роль подпространства Π_{m-1}, о котором идет речь в [3, с. 70]. При этом квадрике $Q_{m-2} \subset \Pi_{m-1}$ в [3, (24), с. 72] в данной статье отвечает конус Q_{m-1}^2.

1.3. Проведем такую канонизацию ортонормального репера R в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$, при которой

$$\begin{aligned} &A_{r_1 r_2} = 0, \ E \equiv \det[E_{r_1 r_2 s_1}^{t_2}] \ne 0, \ (r_1, \ s_1, \ t_1 = \overline{1, p}), \\ &A_{\hat{r}_1 \hat{r}_2} = 0, \ \hat{E} \equiv \det[E_{\hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{s}_1}^{\hat{t}_2}] \ne 0, \ (\hat{r}_1, \ \hat{s}_1, \ \hat{t}_1 = \overline{1, q}), \end{aligned} \tag{1.8}$$

$(r_2, s_2, t_2 = \overline{p+1, m}; \ \hat{r}_2, \hat{s}_2, \hat{t}_2 = \overline{q+1, n}; \ 2 \le p < m; \ m+2 \le q < n)$.
Здесь

$$\begin{aligned} E_{r_1 r_2 s_1}^{t_2} &= A_{r_1 s_1} \delta_{t_1}^{s_1} \delta_{r_2}^{t_2} - A_{s_2 r_2} \delta_{t_1 r_1} \delta^{t_2 s_2}, \\ E_{\hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{s}_1}^{\hat{t}_2} &= A_{\hat{r}_1 \hat{s}_1} \delta_{\hat{t}_1}^{\hat{s}_1} \delta_{\hat{r}_2}^{\hat{t}_2} - A_{\hat{s}_2 \hat{r}_2} \delta_{\hat{t}_1 \hat{r}_1} \delta^{\hat{t}_2 \hat{s}_2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

причем δ с соответствующими индексами означает символы Кронекера. Заметим, что каждая пара (r_1r_2) $\{(\hat{r}_1\hat{r}_2)\}$ в определителе $E\{\hat{E}\}$ в (1.8) указывает на номер соответствующей строки квадратной матрицы этого определителя порядка $p(m-p)$ $\{q(n-m-q)\}$, а каждая пара $\binom{t_2}{s_1}\left\{\binom{\hat{t}_2}{\hat{s}_1}\right\}$ – на номер соответствующего столбца.

Покажем, что в общем случае на m-поверхности S_m каждый из определителей E и $\hat{E}$ не равен нулю. Для определенности покажем это, например, для определителя E. С этой целью положим

$$A_{r_1s_1}=0,\ A_{r_2s_2}=0,\ (r_1\neq s_1,\ r_2\neq s_2). \tag{1.10}$$

Тогда из (1.8) и (1.9) получаем

$$E=\prod_{(r_1\neq s_1,\, r_2\neq s_2)}(A_{r_1r_1}-A_{s_1s_1})(A_{r_2r_2}-A_{s_2s_2}), \tag{1.11}$$

где символ П означает произведение соответствующих величин. Из (1.11) следует, что $E\neq 0$ в общем случае на m-поверхности S_m.

Заметим с учетом (1.6), что величины $A_{\alpha\beta}$ выражаются через

$$N=(n-m)\frac{m(m+1)}{2} \tag{1.12}$$

независимых величин $A^{\hat{a}}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=\overline{1,m};\ \hat{\alpha}=\overline{m+1,n}$, симметричных с учетом [1, (1.5)] по нижним индексам. Из (1.10) и (1.8) следует, что величины $A_{\alpha\beta}$ удовлетворяют

$$N_1=(n-m)(m-p)+p^2 \tag{1.13}$$

соотношениям. Из [1, (1.7)] следует, что $N_1<N$. Поэтому вычисление определителя E в точке $A\in S_m$ при частных значениях (1.10) оправдано. Таким образом, $E\neq 0$ в общем случае на m-поверхности $S_m\subset E_n$. Аналогично показывается, что и определитель $\hat{E}\neq 0$ в общем случае на m-поверхности S_m общего вида. Заметим также, что с учетом (1.2), (1.6), $2\leq p<m$, $m+2\leq q<n$, (1.12) и (1.13) соотношения (1.8) накладывают на величины $A^{\hat{a}}_{\alpha\beta}$ всего

$$N_2=p(m-p)+q(n-q)$$

соотношений. Из [1, (1.7), (2.16)] замечаем, что $N_2<N$. Поэтому соотношения (1.8) на m-поверхности S_m, с помощью которых проводится соответствующая канонизация ортонормального репера R, могут иметь место.

Соотношения (1.8) с учетом (1.9), (1.7) и (1.3) приводят к следующим дифференциальным уравнениям на m-поверхности $S_m\subset E_n$:

$$\begin{aligned} E^{t_2}_{r_1r_2s_1}\omega^{s_1}_{t_2}&=A_{r_1r_2\alpha}\omega^{\alpha},\\ E^{\hat{t}_2}_{\hat{r}_1\hat{r}_2\hat{s}_1}\omega^{\hat{s}_1}_{\hat{t}_2}&=A_{\hat{r}_1\hat{r}_2\alpha}\omega^{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Каждая из систем дифференциальных уравнений в (1.14) представляет собой систему линейных уравнений относительно соответствующих 1-форм с неравным нулю определителем E или $\hat{E}$ на $S_m\subset E_n$. Поэтому каждую из этих систем можно однозначно разрешить относительно 1-форм $\omega^{s_1}_{t_2}=-\omega^{t_2}_{s_1}$ и $\omega^{\hat{s}_1}_{\hat{t}_2}=-\omega^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1}$. Это означает, что эти 1-формы являются главными, выражающимися через базисные формы:

$$\omega^{t_2}_{s_1}=-\omega^{s_1}_{t_2}=A^{t_2}_{s_1\alpha}\omega^{\alpha},\ \omega^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1}=-\omega^{\hat{s}_1}_{\hat{t}_2}=A^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1\alpha}\omega^{\alpha}, \tag{1.15}$$

где с учетом [1, (1.1)] коэффициенты при ω^a удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dA^{t_2}_{s_1\beta}-A^{t_2}_{s_1\alpha}\omega^{\alpha}_{\beta}-A^{t_2}_{t_1\alpha}\omega^{t_1}_{s_1}+A^{s_2}_{s_1\beta}\omega^{t_2}_{s_2}&=A^{t_2}_{s_1\beta\alpha}\omega^{\alpha},\\ dA^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1\beta}-A^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1\alpha}\omega^{\alpha}_{\beta}-A^{\hat{t}_2}_{\hat{t}_1\alpha}\omega^{\hat{t}_1}_{\hat{s}_1}+A^{\hat{s}_2}_{\hat{s}_1\beta}\omega^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_2}&=A^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1\beta\alpha}\omega^{\alpha}, \end{aligned}$$

причем явный вид величин $A^{t_2}_{s_1\alpha\beta}$ и $A^{\hat{t}_2}_{\hat{s}_1\alpha\beta}$ для нас несущественный.

Замечание 1.2. Из (1.15) замечаем, что канонизация ортонормального репера R на m-поверхности $S_m\subset E_n$ по формулам (1.8) существует на этой m-поверхности в соответствии с леммой Н.М. Остиану [4]. Из (1.5), (1.1) с учетом (1.8) следует, что указанная канонизация репера R геометрически характеризуется следующим образом:

1) линейные подпространства в точке $A\in S_m\subset E_n$:

$$\tilde{L}^1_p=(\bar{A},\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_p),\ \tilde{L}^2_{m-p}=(\bar{A},\bar{e}_{p+1},\ldots,\bar{e}_m) \tag{1.16}$$

в слое L_m расслоения $T_{m,m}$ выбирается так, что они ортогональны и сопряжены относительно конуса $Q^2_{m-1}\subset L_m$, см. (1.5);

2) линейные подпространства в точке $A\in S_m\subset E_n$:

$$\tilde{P}^1_q=(\bar{A},\bar{e}_{m+1},\ldots,\bar{e}_q),\ \tilde{P}^2_{n-m-q}=(\bar{A},\bar{e}_{q+1},\ldots,\bar{e}_n) \tag{1.17}$$

в слое P_{n-m} расслоения $N_{m,n-m}$ выбираются так, что они ортогональны и сопряжены относительно конуса $K^2_{n-m}\subset P_{n-m}$, см. (1.4).

Замечание 1.3. Двумерные площадки $L^1_2\subset L_m$ и $P^1_2\subset P_{n-m}$ в точке $A\in S_m\subset E_n$ будут инвариантным образом определяться в следующем пункте в подпространствах $L^1_p\subset L_m$ и $P^1_q\subset P_{n-m}$ соответственно (см. (1.16) и (1.17)), при p и q, принимающих следующие значения: $p=3$, $p=4$, $q=2$.

2. Случай $p=3$, $p=4$, $q=2$

Во всех этих случаях плоскость P^1_2, совпадает с плоскостью $\tilde{P}^1_2=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, что с учетом [1, (2.1)] и (1.17) возможно тогда и только тогда, когда

$$g^{\hat{a}_2}_{\hat{a}_1}=-g^{\hat{a}_1}_{\hat{a}_2}=0.$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях

$$\begin{aligned} P^1_2&=\tilde{P}^1_2=(\bar{A},\bar{e}_{m+1},\bar{e}_{m+2}),\\ \tilde{P}^2_{n-m-2}&=P^2_{n-m-2}=(\bar{A},\bar{e}_{m+3},\ldots,\bar{e}_n), \end{aligned}$$

причем в силу (1.1) и [1, (2.10)] имеем

$$\begin{gathered} C^{\hat{a}_1}_{b_1c_1}=B^{\hat{a}_1}_{b_1c_1}=A^{\hat{a}_1}_{b_1c_1}+A^{\hat{a}_1}_{b_1b_2}h^{b_2}_{c_1}+A^{\hat{a}_1}_{b_2c_1}h^{b_2}_{b_1}+A^{\hat{a}_1}_{b_1c_2}h^{b_2}_{b_1}h^{c_2}_{c_1}=C^{\hat{a}_1}_{c_1b_1},\\ (a_1,b_1,c_1=1,2;\ \hat{a}_1,\hat{b}_1,\hat{c}_1=m+1,m+2;\ \hat{a}_2,\hat{b}_2,\hat{c}_2=\overline{3,m}). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Заметим, что в каждом из рассматриваемых случаев величины $h^{c_2}_{c_1}$ считаются неизвестными и будут определенным образом определяться через компоненты геометрического объекта [1, (1.5)].

2.1. Случай $p=3$, $q=2$

В данном случае с учетом (1.16) имеем

$$\tilde{L}^1_3=(\bar{A},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3),\ \tilde{L}^2_{m-3}=(\bar{A},\bar{e}_4,\ldots,\bar{e}_m), \tag{2.2}$$

поэтому здесь предполагается, что $m\geq 3$. Заметим, что в рассматриваемый случай входит 3-поверхность S_3 в E_5.

Поскольку плоскость L_2^1 вида [1, (2.1)] в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ принадлежит 3-плоскости $\tilde{L}_3^1$, мы будем искать L_2^1 инвариантным образом в этой 3-плоскости. Поэтому в силу [1, (2.1), (2.4)] и (2.2) заключаем, что

$$h_{a_1}^{r_2}=0,\quad (r_2=\overline{4,m}),\tag{2.3}$$

причем

$$L_{m-2}^2=\tilde{L}_{m-3}^2\cup L_1,$$

где прямая $L_1=(\overline{A},\overline{\varepsilon}_3)$, $\overline{\varepsilon}_3=\overline{e}_3+h_3^{a_1}\overline{e}_{a_1}$, $h_3^{a_1}=-h_{a_1}^3$ ортогональна плоскости $L_2^1\subset\tilde{L}_3^1$ в точке $A\in S_m$. Из (2.3) заключаем, что в рассматриваемом случае всего неизвестных величин $h_{a_1}^{a_2}$ в точке $A\in S_m$ будет две: $h_{a_1}^3=-h_3^{a_1}$ (a_1=1,2). Эти величины будем искать при условии, что отображение $f{:}L_2^1\to P_2^1$ в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ является отображением $f_г$ в смысле определения 2.1 в [1]. Из [1, (2.16)] с учетом (2.1) и (2.3) получаем, что искомые величины удовлетворяют следующим двум неоднородным квадратичным уравнениям:

$$\varphi^{\hat{a}_1}\equiv(A_{11}^{\hat{a}_1}+A_{22}^{\hat{a}_1})+2A_{13}^{\hat{a}_1}h_1^3+2A_{23}^{\hat{a}_1}h_2^3+A_{33}^{\hat{a}_1}\{(h_1^3)^2+(h_2^3)^2\}=0\tag{2.4}$$

с двумя неизвестными $h_{b_1}^3=-h_3^{b_1}$ (a_1,b_1=1,2).

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (2.4):

$$\left[\frac{\partial\varphi^{\hat{a}_1}}{\partial h_{a_1}^3}\right],\tag{2.5}$$

где

$$\frac{\partial\varphi^{\hat{a}_1}}{\partial h_{a_1}^3}=2A_{a_13}^{\hat{a}_1}+2A_{33}^{\hat{a}_1}h_{a_1}^3.\tag{2.6}$$

Подсчитаем ранг матрицы (2.5), например, при значениях $h_{a_1}^3=0$. Тогда из системы (2.4) получаем

$$A_{11}^{\hat{a}_1}+A_{22}^{\hat{a}_1}=0,\tag{2.7}$$

а из (2.5) с учетом (2.6) замечаем, что указанная якобиева матрица имеет минор второго порядка

$$\Pi_2\equiv\begin{vmatrix}A_{13}^{m+1} & A_{23}^{m+1}\\ A_{13}^{m+2} & A_{23}^{m+2}\end{vmatrix},$$

который, как легко видеть, в общем случае не равен нулю на m-поверхности $S_m\subset E_n$ ($m\geq 3$). Поэтому в общем случае на S_m ранг матрицы (2.5) равен 2, а потому система (2.4) в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ имеет в общем случае конечное число (не более 4) решений относительно $h_{a_1}^3$. Поэтому справедлива

Теорема 2.1. В случае q=2, p=3 в плоскости $\tilde{L}_3^1$, проходящей через точку $A\in S_m\subset E_n$ ($m\geq 3$), имеется конечное число (не более 4) плоскостей L_2^1 таких, что соответствующее отображение $f{:}L_2^1\to P_2^1$ является отображением $f_г$ в смысле определения 2.1 в [1].

Замечание 2.1. Соотношения (2.7) с учетом $\Pi_2\neq 0$ обеспечивают канонизацию ортонормального репера R m-поверхности $S_m\subset E_n$, при которой плоскость $L_2^1=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ удовлетворяет утверждению теоремы 2.1. При такой канонизации репера R, как следует из (2.7) и [1, (1.5)] с учетом $\Pi_2\neq 0$, 1-формы $\omega_{a_1}^3$ становятся главными в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$. Поэтому эта канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [4].

2.2. Случай p=4, q=2

В данном случае с учетом (1.16) имеем

$$\tilde{L}_4^1=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3,\overline{e}_4),\ \tilde{L}_{m-4}^2=(\overline{A},\overline{e}_5,\ldots,\overline{e}_m).\tag{2.8}$$

Поэтому здесь предполагаем, что $m\geq 4$. Заметим, что в рассматриваемый случай входит 4-поверхность S_4 в E_6.

Поскольку плоскость L_2^1 вида [1, (2.1)] в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ входит в 4-плоскость $\tilde{L}_4^1$, мы будем искать L_2^1 инвариантным образом в $\tilde{L}_4^1$. Поэтому в силу [1, (2.1)], (2.2) и (2.8) заключаем, что

$$h_{a_1}^{r_2}=0,\ (r_2=5,\ldots,m),\tag{2.9}$$

причем

$$L_{m-2}^2=\tilde{L}_{m-4}^2\cup L_2^2,$$

где плоскость $L_2^2=(\overline{A},\overline{\varepsilon}_3,\overline{\varepsilon}_4)$, $\overline{\varepsilon}_{a_2}=\overline{e}_{a_2}+h_{a_2}^{a_1}\overline{e}_{a_1}$, $h_{a_1}^{a_2}=-h_{a_2}^{a_1}$ ортогональна плоскости $L_2^1\subset\tilde{L}_4^1$ в точке $A\in S_m$. Из (2.9) следует, что в рассматриваемом случае всего неизвестных величин $h_{a_1}^{a_2}$ (a_1=1,2; a_2=3,4) в точке $A\in S_m$ будет четыре: $h_{a_1}^{a_2}=-h_{a_2}^{a_1}$. Эти величины будем искать при условии, что отображение $f{:}L_2^1\to P_2^1$ в каждой точке $A\in S_m\subset E_n$ является отображением f_a в смысле определения 2.1 в [1]. Из [1, (2.16)] с учетом (2.1) и (2.9) получаем, что величины $h_{a_1}^{a_2}$ удовлетворяют следующим четырем квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned}&\varphi^1\equiv B_{11}^{m+1}+B_{22}^{m+1}=0,\ \varphi^2\equiv B_{11}^{m+2}+B_{22}^{m+2}=0,\\ &\varphi^3\equiv B_{12}^{m+1}-B_{22}^{m+2}=0,\ \varphi^4\equiv B_{12}^{m+2}-B_{22}^{m+1}=0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

где величины $B_{b_1c_1}^{\hat{a}_1}$ ($\hat{a}_1=m+1,m+2;b_1,c_1$=1,2) определяются по формулам (2.1).

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (2.10)

$$\left[\frac{\partial\varphi^{r_1}}{\partial h_{a_1}^{a_2}}\right],\tag{2.11}$$

($r_1=\overline{1,4};a_1$=1,2;a_2=3,4). Подсчитывая ранг этой системы с учетом (2.10) и (2.1), например, при

$$h_{a_1}^{a_2}=-h_{a_2}^{a_1}=0,$$

в результате чего имеем

$$A_{11}^{\hat{a}_1}+A_{22}^{\hat{a}_1}=0,\ A_{12}^{m+1}-A_{22}^{m+2}=0,A_{12}^{m+2}+A_{22}^{m+1}=0,\tag{2.12}$$

мы убеждаемся в том, что матрица (2.11) имеет в общем случае не равный нулю минор четвертого порядка на S_m:

$$\Pi_4=\begin{vmatrix}A_{13}^{m+1} & A_{14}^{m+1} & A_{23}^{m+1} & A_{24}^{n+1}\\ A_{13}^{m+2} & A_{14}^{m+2} & A_{23}^{m+2} & A_{24}^{n+2}\\ A_{23}^{m+1} & A_{24}^{m+1} & A_{13}^{m+1}-2A_{23}^{m+2} & A_{14}^{n+1}-2A_{24}^{n+2}\\ A_{23}^{m+2} & A_{24}^{m+2} & A_{13}^{m+2}-2A_{23}^{m+1} & A_{14}^{n+2}+2A_{24}^{n+1}\end{vmatrix}.\tag{2.13}$$

Поэтому ранг матрицы (2.11) в общем случае равен 4, а поэтому система (2.10) в общем случае

имеет конечное число решений относительно $h^{a_2}_{a_1}$ на S_m. Следовательно справедлива

Теорема 2.2. В случае p=4, q=2 в 4-плоскости $\widetilde{L}^1_4$ в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ ($m \geq 4$) имеется конечное число плоскостей L^1_2 таких, что соответствующее отображение $f{:}L^1_2 \to P^1_2$ является отображением f_a в смысле определения 2.1 в [1].

Замечание 2.2. Соотношения (2.12) с учетом $\Pi_4 \neq 0$, см. (2.13), обеспечивают канонизацию ортонормального репера R m-поверхности $S_m \subset E_n$, при которой плоскость $L^1_2=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2) \perp L^2_2=(\overline{A},\overline{e}_3,\overline{e}_4)$ удовлетворяет утверждению теоремы 2.2. При такой канонизации репера R, как следует из (2.12) и [1, (1.5)] с учетом $\Pi_4 \neq 0$, 1-формы $\omega^{a_2}_{a_1}$ становятся главными в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$. Поэтому эта канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышева В.К., Ивлев Е.Т. Отображение двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 2. – С. 6–8.
2. Ивлев Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Выпуск 22. – Межвуз. темат. сб. научных трудов, Калининградский университет, Калининград, 1991. – С. 49–56.
3. Ивлев Е.Т., Тыртый-оол, Бразевич М.В. О некоторых геометрических образах многообразия пар двойственных линейных подпространств в многомерном проективном пространстве // Математический сборник. Выпуск 1. Изд-во Томского университета. Томск. – 1974. – С. 68–91.
4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

УДК 514.76